Задача 2.

$$f\left(\frac{x-2}{x-1}\right)+2f\left(\frac{3-x}{x}\right)=\frac{x+1}{1-x}$$

Решение:

При x=t получим

$$f\left(\frac{t-2}{t-1}\right)+2f\left(\frac{3-t}{t}\right)=\frac{t+1}{1-t}$$

Было бы здорово найти такое значение для x, выраженное через t, чтобы после подстановки аргументы слагаемых в левой части поменялись местами. Если бы мы такое значение нашли, то

$\frac{x-2}{x-1}$ превратилось бы в $\frac{3-t}{t}$. Попробуем найти такое значение.

$$\frac{x-2}{x-1}=\frac{3-t}{t}\Rightarrow 1-\frac{1}{x-1}=\frac{3-t}{t}\Rightarrow\frac{1}{x-1}=1-\frac{3-t}{t}=\frac{2t-3}{t}\Rightarrow$$

$$x-1=\frac{t}{2t-3}\Rightarrow x=\frac{t}{2t-3}+1=\frac{3t-3}{2t-3}$$

Итак, при $x=\frac{3t-3}{2t-3}$ выражение $\frac{x-2}{x-1}$ превращается в $\frac{3-t}{t}$

Посмотрим, во что превратится аргумент второго слагаемого.

$$\frac{3-x}{x}=\frac{3-\frac{3t-3}{2t-3}}{\frac{3t-3}{2t-3}}=\frac{6t-9-3t+3}{2t-3}:\frac{3t-3}{2t-3}=\frac{3(t-2)}{3(t-1)}=\frac{t-2}{t-1}$$

Решение:

$$\text{При } x=t \text{ получим } f\left(\frac{t-2}{t-1}\right)+2f\left(\frac{3-t}{t}\right)=\frac{t+1}{1-t}$$

$$\text{При } x=\frac{3t-3}{2t-3} \text{ получим } f\left(\frac{3-t}{t}\right)+2f\left(\frac{t-2}{t-1}\right)=\frac{\frac{3t-3}{2t-3}+1}{1-\frac{3t-3}{2t-3}}$$

В результате получим систему

$$\begin{cases} f\left(\frac{t-2}{t-1}\right)+2f\left(\frac{3-t}{t}\right)=\frac{t+1}{1-t} \\ f\left(\frac{3-t}{t}\right)+2f\left(\frac{t-2}{t-1}\right)=\frac{6-5t}{t}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 2f\left(\frac{t-2}{t-1}\right)+4f\left(\frac{3-t}{t}\right)=\frac{2t+2}{1-t} \\ f\left(\frac{3-t}{t}\right)+2f\left(\frac{t-2}{t-1}\right)=\frac{6-5t}{t}\end{cases}$$

Вычесть из первого уравнения второе.

$$3f\left(\frac{3-t}{t}\right)=\frac{2t+2}{1-t}-\frac{6-5t}{t}=\frac{-3t^2+13t-6}{t(1-t)}$$

А отсюда $f\left(\frac{3-t}{t}\right)=\frac{-3t^2+13t-6}{3t(1-t)}$

Выполним замену $\frac{3-t}{t}=a\Rightarrow\frac{3}{t}-1=a\Rightarrow t=\frac{3}{a+1}$

Тогда получим

$$f(a)=\frac{-3\cdot\frac{9}{(a+1)^2}+13\cdot\frac{3}{a+1}-6}{3\cdot\frac{3}{a+1}-3\cdot\frac{9}{(a+1)^2}}=\frac{-2a^2+9a+1}{3a-6}$$

А так как нет разницы, какой буквой обозначен аргумент, то

$$f(x)=\frac{-2x^2+9x+1}{3x-6}=\frac{2x^2-9x-1}{6-3x}$$