

Задача, связанная с суммами степеней.

$$\begin{cases} S_1 = x + y + z = 1 \\ S_2 = x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ S_3 = x^3 + y^3 + z^3 = 3 \end{cases}$$

Вычислить $S_4 = x^4 + y^4 + z^4$

Решение:

Необходимо знать, что

Если известны сумма первых степеней нескольких чисел (S_1), сумма вторых степеней этих же чисел (S_2) и сумма третьих степеней этих же чисел (S_3), то сумма четвертых степеней этих же чисел (S_4)

$$S_4 = \frac{S_1^4}{6} - S_1^2 \cdot S_2 + \frac{4 \cdot S_1 \cdot S_3}{3} + \frac{S_2^2}{2}$$

Для данной задачи

$$S_4 = \frac{1^4}{6} - 1^2 \cdot 2 + \frac{4 \cdot 1 \cdot 3}{3} + \frac{2^2}{2} = \frac{1}{6} - 2 + 4 + 2 = 4\frac{1}{6}$$

Ответ: $4\frac{1}{6}$

Обобщение: Если известны суммы степеней нескольких чисел $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$, то существует формула, показывающая, что S_{n+1} является линейной комбинацией предыдущих сумм.