

Натуральные числа.

Параграф 1.

Натуральные числа.

Полезные теоремы и обозначения.

Два натуральных числа a и b называются сравнимыми по модулю q , если эти числа при делении на q дают одинаковые остатки.

Записывается это как $a \equiv b \pmod{q}$.

Верны следующие утверждения.

Утверждение 1.

$$\begin{cases} a_1 \equiv b_1 \pmod{c} \\ a_2 \equiv b_2 \pmod{c} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 \cdot b_1 \equiv a_2 \cdot b_2 \pmod{c} \\ a_1 + b_1 \equiv a_2 + b_2 \pmod{c} \end{cases}$$

Утверждение 2 (малая теорема Ферма).

Если p -простое число, $\text{НОД}(n, p) = 1 \Rightarrow n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

Утверждение 3 (алгоритм Евклида поиска наибольшего общего делителя).

Пусть $n > m$; $m, n \in \mathbb{N}$;

Алгоритм.

1. В первый столбик записать большее число, во второй меньшее, в третий остаток от деления большего на меньшее.
2. Если остаток не равен 0, то большим считать меньшее число, меньшим считать остаток, перейти к пункту 1.
3. Иначе меньшее число считать $\text{НОД}(m, n)$.

Пример: Найти $\text{НОД}(345, 950)$

950	345	260
345	260	85
260	85	5
85	5	0

Утверждение 4.

Любое натуральное число можно единственным образом представить в виде произведения степеней простых множителей.

Например $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$

Утверждение 5.

Количество делителей числа $m = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot p_3^{k_3} \cdot \dots \cdot p_n^{k_n} =$
 $K(m) = (k_1 + 1)(k_2 + 1)(k_3 + 1) \cdot \dots \cdot (k_n + 1)$

Утверждение 6.

Для любых натуральных n $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$

Для нечетных натуральных n $a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - b^n)$

Задания для самостоятельного решения.

1. Найти наименьшее натуральное число, имеющее 12 делителей.
2. На какую наибольшую степень числа 7 делится 151!
3. Сколько существует простых чисел p таких, что $p^{10} + 10$ простое число.
4. Делится ли число $24^{24} - 1$ на число 35.
5. Какой остаток дает число 6^{102} при делении на число 101.
6. Найти сумму всех чисел на $[1; 5000]$, которые при делении на 11 дают в остатке 3, а при делении на 17 дают в остатке 5.
7. Какая цифра на конце числа $3767^{2016^{7777}}$.
8. Сколькими нулями оканчивается сумма $41! + 56! + 77!$
9. Сколько натуральных чисел от 300 до 800 оканчиваются цифрой 7.
10. При каких n сократимы дроби

$$a) \frac{n^2 + 2n + 4}{n^2 + n + 3}; \quad б) \frac{n^3 - n^2 - 3n}{n^2 - n + 3}$$
11. Найти все натуральные n , при которых можно сократить дроби

$$a) \frac{2n^2 - 1}{n + 1}; \quad б) \frac{n^2 - n + 1}{n^2 + 1}$$
12. Найти НОД всех шестизначных чисел, записанных цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6 без повторений.
13. Пусть a действительное число, причем $a + \frac{1}{a}$ целое. При каких натуральных n число $a^n + \frac{1}{a^n}$ тоже целое.
14. Найти остатки от деления 3^{2025} на 5 и 2^{2026} на 7.
15. У натурального числа сначала записаны 2025 троек, потом цифра x , затем 2026 семерок. Какая должна быть цифра x , если заданное натуральное число делится на 11.
16. У натурального числа сначала записаны 2025 троек, потом цифра x , затем 2026 семерок. Какая должна быть цифра x , если заданное натуральное число делится на 11.
17. Задано число 2^{2025} . Это число записали в виде многозначного натурального числа. Пусть K_1 – сумма цифр этого числа, K_2 – сумма цифр числа K_1 , K_3 – сумма цифр числа K_2 и т.д. Пусть K_n – однозначное число. Найти K_n .
18. Число при некоторой перестановке своих цифр удваивается. Какой остаток дает это число при делении на 9.
19. При каких натуральных n число $n^4 + 4$ простое?
20. При каких натуральных n число $n^4 + 64$ составное?
21. Число n не является степенью двойки. При каких n число $k^n + l^n$ является простым числом?
22. Определить p , если $p, p+10, p+14$ простые числа.
23. Простым или составным является число $2^{3^{2025}} + 3^{2025^3}$
24. При каких n число $n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n$ не делится на 120?

25. При каких n число $n^9 - 6n^7 + 9n^5 - 4n^3$ делится на 8640?
26. Натуральные числа x и y таковы, что $3x+8y$ делится на 17. Найти остаток от деления на 17 числа
- $$2^x \cdot (3x + 8y) + 3^y \cdot (35x + 65y)$$