

Задачи на деление

Задача 1. Докажите, что если $3x + 8y$ делится на 17 без остатка, то и $35x + 65y$ также делится на 17.

Задача 2. При каких значениях n на интервале $(2; 30]$ дробь

$$\frac{11n + 3}{13n + 4}$$

сократима?

Задача 3. Докажите, что для натурального $n > 1$ выражение

$$n^n - n^2 + n - 1$$

делится на $(n - 1)^2$.

Задача 4. Найдите все натуральные $n < 100$, такие что

$$\frac{n^3 + 23}{24}$$

является целым числом.

Задача 5. Докажите, что для любого натурального n значение

$$\frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{3}$$

является натуральным числом.

Задача 6. Докажите, что ни при каких натуральных n выражение

$$n^3 + 3n + 5$$

не делится на 121.

Задача 7. Вычислите $\text{НОД}(2^{19} + 1, 2^{98} - 1)$.

Задача 8. Сколько существует $A \in \mathbb{N}$ таких, что

$$\text{НОК}(16, 50, A) = 1200?$$

Задача 9. Докажите, что если $\text{НОД}(a, b) = 1$, где $a, b \in \mathbb{Z}$, то число вида $a^2 + b^2$ не имеет делителя вида $4k + 3$.

Задача 10. Докажите, что для простого $p > 3$ значение $p^2 - 1$ делится на 24.

Задача 11. Докажите, что если для $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$(\sqrt{2} + 1)^n = a_n + b_n\sqrt{2},$$

то $\text{НОД}(a_n, b_n) = 1$.