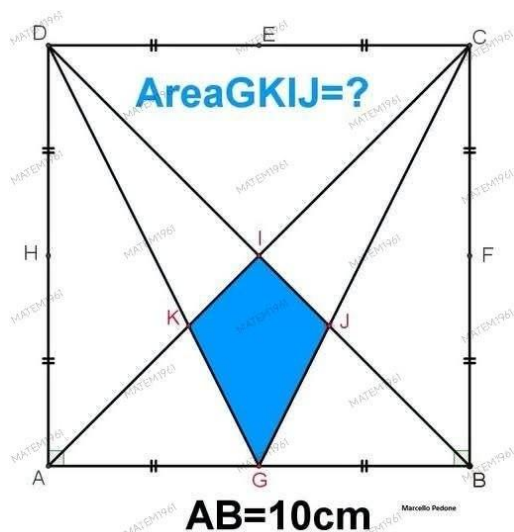


Задача 1.



Рассмотреть $\triangle GDB$ и секущую CA .

По теореме Менелая $\frac{BI}{ID} \cdot \frac{DK}{KG} \cdot \frac{GA}{AB} = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{1} \cdot \frac{DK}{KG} \cdot \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \frac{DK}{KG} = \frac{2}{1}$$

$$S(ADG) = \frac{AD \cdot AG}{2} = 25$$

У $\triangle DAK$ и $\triangle GAK$ общая вершина и основания лежат на одной прямой $\Rightarrow \frac{S(DAK)}{S(GAK)} = \frac{DK}{GK} = \frac{2}{1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow S(GAK) = \frac{25}{3}$$

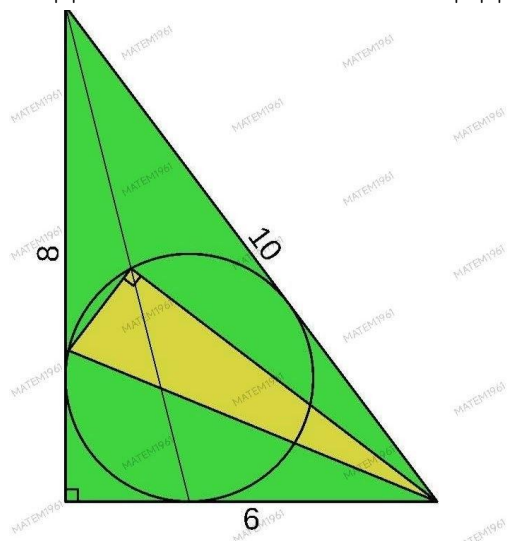
Из соображений симметрии $S(BJG) = \frac{25}{3}$

$$S(AIB) = \frac{S(ABCD)}{4} = \frac{100}{4} = 25$$

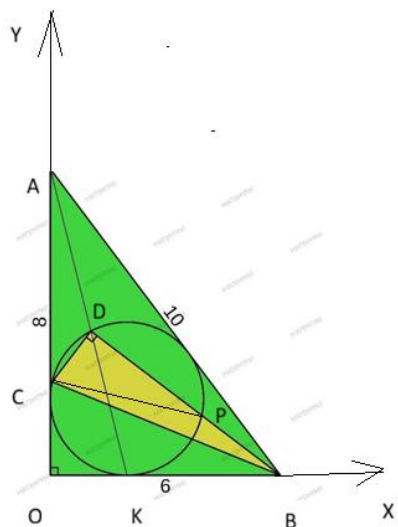
$$S(KIJG) = S(AIB) - S(AKG) - S(BJG) = \frac{25}{3}$$

Ответ: $\frac{25}{3}$

Задача 2. Найти площади зеленой части и желтой части.



Ввести систему координат, так что направление горизонтального катета совпадает с направлением оси Ox , направление вертикального катета совпадает с направлением оси Oy , вершина прямого угла является началом координат.



Радиус вписанной окружности равен

$$r = \frac{8 + 6 - 10}{2} = 2$$

В заданной системе координат

$$A(0; 8), K(2; 0) \Rightarrow \overline{AK}(2; -8)$$

Пусть $M(x; y) \in (AK) \Rightarrow \overline{AM}(x; y - 8)$

Так как эти векторы коллинеарны,

$$\text{то } \frac{y-8}{-8} = \frac{x}{2} \Rightarrow y = -4x + 8$$

Это уравнение прямой AK .

Уравнение вписанной окружности $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$

вписанной окружности.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} y = -4x + 8 \\ (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -4x + 8 \\ (x - 2)^2 + (-4x + 6)^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{cases} y = -4x + 8 \\ 17x^2 - 52x + 36 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -4x + 8 \\ \begin{bmatrix} x = 2 \\ x = \frac{18}{17} \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{18}{17} \\ y = \frac{64}{17} \end{cases} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Итак $D(\frac{18}{17}; \frac{64}{17})$

Найти длину отрезка $[DB]$.

$$\overline{DB}\left(\frac{84}{17}; -\frac{64}{17}\right) \Rightarrow DB^2 = \frac{4^2}{17^2} \cdot 21^2 + \frac{4^2}{17^2} \cdot 16^2 = \frac{4^2}{17^2} \cdot 697 \Rightarrow DB = 4 \cdot \sqrt{\frac{41}{17}}$$

Если из одной точки вне окружности к окружности проведены секущая и касательная, то квадрат длины касательной равен произведению длины секущей на длину ее внешней части.

$$BD \cdot BP = BK^2 \Rightarrow 4 \cdot \sqrt{\frac{41}{17}} \cdot BP = 16 \Rightarrow BP = \frac{4}{\sqrt{\frac{41}{17}}}$$

$$DP = DB - BP = 4 \cdot \sqrt{\frac{41}{17}} - \frac{4}{\sqrt{\frac{41}{17}}} = \frac{4 \cdot \left(\frac{41}{17} - 1\right)}{\sqrt{\frac{41}{17}}} = \frac{4 \cdot \frac{24}{17}}{\sqrt{\frac{41}{17}}} = \frac{\frac{96}{17}}{\sqrt{\frac{41}{17}}} = \frac{96}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{41}} = \frac{96}{\sqrt{697}}$$

Рассмотрите $\Delta CDP: \begin{cases} CP = 4 \\ DP = \frac{96}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{41}} \end{cases} \Rightarrow DC^2 = CP^2 - DP^2 = 16 - \frac{9216}{697} = \frac{1936}{697}$

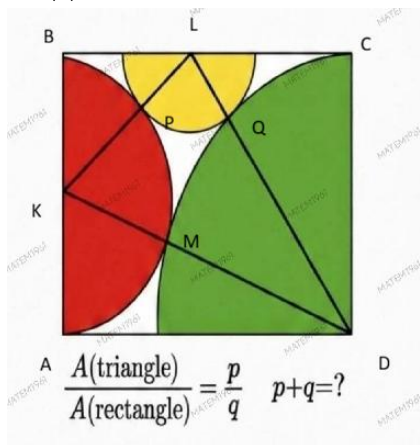
$$DC = \frac{44}{\sqrt{697}}$$

$$S(CDB) = \frac{CD \cdot DB}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{44}{\sqrt{697}} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{17}} = \frac{88}{17} = 5 \frac{3}{17}$$

$$S(AOB) = \frac{AO \cdot OB}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24$$

Ответ: площадь желтой части $5\frac{3}{17}$, площадь зеленой части $18\frac{14}{17}$

Задание 3



Для всех подобных конфигураций результат будет один и тот же.

Пусть радиус красного полукруга будет равен 1, радиус зеленого полукруга будет равен 2, радиус желтого полукруга r .

Рассмотрим $\triangle AKD$: $KD = 1 + 2 = 3 \Rightarrow AD = \sqrt{KD^2 - KA^2} = 2\sqrt{2}$
 $KA = 1$

$$\triangle KBL: BL = \sqrt{KL^2 - KB^2} = \sqrt{(1+r)^2 - 1}$$

$$\triangle CDL: CL = \sqrt{DL^2 - DC^2} = \sqrt{(2+r)^2 - 4}$$

Так как ABCD является прямоугольником, то

$$\sqrt{(1+r)^2 - 1} + \sqrt{(2+r)^2 - 4} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{Пусть } \begin{cases} \sqrt{(1+r)^2 - 1} = a \\ \sqrt{(2+r)^2 - 4} = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1+r)^2 - 1 = a^2 \\ (2+r)^2 - 4 = b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r^2 + 2r = a^2 \\ r^2 + 4r = b^2 \end{cases}$$

В новых переменных система будет выглядеть так.

$$\begin{cases} b + a = 2\sqrt{2} \\ b^2 - a^2 = 2r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b + a = 2\sqrt{2} \\ (b + a)(b - a) = 2r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b + a = 2\sqrt{2} \\ b - a = \frac{r}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow 2b = 2\sqrt{2} + \frac{r}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = \sqrt{2} + \frac{r}{2\sqrt{2}}$$

Из определения b и полученного значения имеем

$$\sqrt{(2+r)^2 - 4} = \frac{4+r}{2\sqrt{2}} \Rightarrow r^2 + 4r = \frac{16 + 8r + r^2}{8} \Rightarrow 7r^2 + 24r - 16 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = -4 \\ r = \frac{4}{7} \end{cases}$$

Отрицательное значение не удовлетворяет условиям задачи.

Стороны исходного прямоугольника равны 2 и $2\sqrt{2}$. Площадь $4\sqrt{2}$.

Стороны треугольника $\frac{11}{7}; \frac{18}{7}; \frac{21}{7}$.

Рассмотрим треугольник, стороны которого в 7 раз больше, чем стороны исходного треугольника.

Стороны рассматриваемого треугольника 11, 18, 21. Полупериметр 25. $S = \sqrt{25 \cdot 14 \cdot 7 \cdot 4} = 5 \cdot 7 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = 70\sqrt{2}$

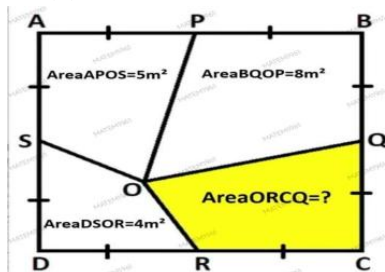
Площадь исходного треугольника, стороны которого в 7 раз меньше, будет в 49 раз меньше площади полученного треугольника.

$$S(KLD) = \frac{70\sqrt{2}}{49} = \frac{10\sqrt{2}}{7}$$

$$\frac{S(ABCD)}{S(KLD)} = 4\sqrt{2} : \frac{10\sqrt{2}}{7} = \frac{4\sqrt{2} \cdot 7}{10\sqrt{2}} = \frac{14}{5} = \frac{p}{q} \Rightarrow p + q = 19$$

Ответ: 19

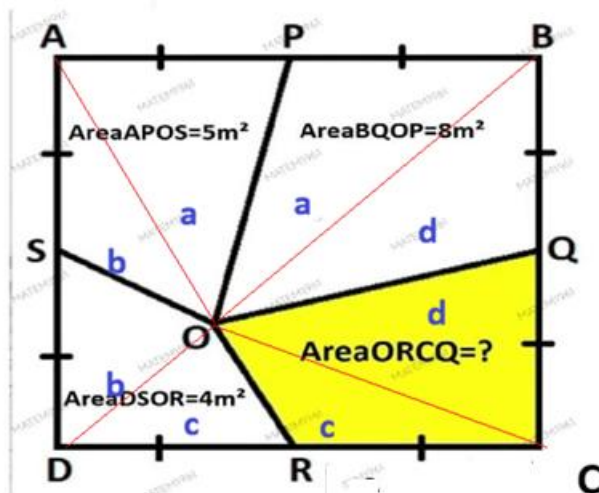
Задача 4.



Решение:

Соединим точку O со всеми вершинами прямоугольника.

Воспользуемся правилом. Если у двух треугольников вершины в одной точке, основания лежат на одной прямой, то отношение площадей равно отношению оснований. Буквами a, b, c, d обозначим площади соответствующих треугольников.



По условию

$$\begin{cases} a + d = 8 \\ a + b = 5 \\ b + c = 4 \\ c + d = t \end{cases}$$

Найти разность первого и второго уравнений.

Найти разность третьего и четвертого уравнений.

$$\begin{cases} d - b = 3 \\ b - d = 4 - t \end{cases}$$

Найти сумму первого и второго уравнений.

$$0 = 7 - t \Rightarrow t = 7$$

Ответ: 7