

№1. Уравнение прямой на плоскости.

$$\gamma - \text{прямая: } \begin{cases} A(x_1; y_1) \in \gamma \\ B(x_2; y_2) \in \gamma \end{cases}$$

Уравнение прямой на плоскости – это уравнение с двумя переменными, которое показывает как связаны между собой координаты каждой точки этой прямой.

Метод.

Найти координаты вектора $\overline{AB}$. Выбрать на прямой произвольную точку $M(x; y)$. Найти координаты вектора $\overline{AM}$. Так как векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AM}$ коллинеарны, то наборы соответствующих координат пропорциональны. Полученное уравнение и есть уравнение прямой. Техническое исполнение.

$$\begin{aligned} & \overline{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1) \\ & \overline{AM}(x - x_1; y - y_1) \\ & \overline{AB} \parallel \overline{AM} \Rightarrow \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \end{aligned}$$

Это и есть уравнение прямой (AB).

Дальше можно упростить, получить уравнение с правой частью, равной нулю или получить явное уравнение.

Пример 1.

Написать уравнение прямой (AB), если $A(1; 2), B(3; 12)$.

Решение:

$$\begin{aligned} A(1; 2), B(3; 12) & \Rightarrow \overline{AB}(3 - 1; 12 - 2) = \overline{AB}(2; 10) \\ M(x; y) & \in (AB); \overline{AM}(x - 1; y - 2) \\ \overline{AM} \parallel \overline{AB} & \Rightarrow \frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{10} \Rightarrow 5x - 5 = y - 2 \Rightarrow y = 5x - 3 \end{aligned}$$

Ответ: $y = 5x - 3$

№2. Уравнение перпендикулярной прямой.

Пусть дана прямая $\gamma_1: y = kx + b$

В этом уравнении прямой k – угловой коэффициент этой прямой – это тангенс угла наклона этой прямой по отношению к оси Ox , b – значение второй координаты, когда первая равна 0.

Если прямые перпендикулярны, то произведение угловых коэффициентов равно (-1) . И, наоборот, если произведение угловых коэффициентов равно (-1) , то прямые перпендикулярны.

Пример 2.

Даны две прямые $\gamma_1: y = 5x - 1$ и $\gamma_2: A(2; 5) \in \gamma_2$. Известно, что $\gamma_1 \perp \gamma_2$

Написать уравнение γ_2 .

Метод.

Найти угловой коэффициент прямой γ_2 .

Определить неизвестный коэффициент b .

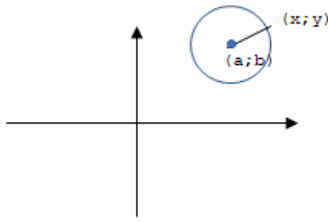
Техническая часть.

$$\begin{cases} \gamma_1 \perp \gamma_2 \\ \gamma_1: y = 5x - 1 \end{cases} \Rightarrow \gamma_2: y = -\frac{1}{5}x + b$$

$$\begin{cases} \gamma_2: y = -\frac{1}{5}x + b \\ A(2; 5) \in \gamma_2 \end{cases} \Rightarrow 5 = -\frac{1}{5} \cdot 2 + b \Rightarrow b = 5 + \frac{2}{5} = \frac{27}{5}$$

Итак: $\gamma_2: y = -\frac{1}{5}x + \frac{27}{5}$

№3. Уравнение окружности.



Окружность – это множество точек, равноудаленных от одной точки, которая называется **центром окружности** (на рисунке имеет координаты (a, b)).

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Пример 3.

Найти координаты центра и радиус окружности, если

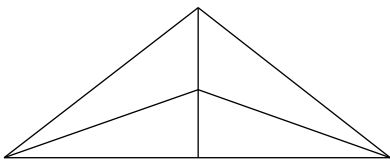
$$x^2 + y^2 - 8x + 10y - 128 = 0$$

Метод: Представить левую часть как сумму квадратов, а правую как квадрат числа.

$$\begin{aligned} x^2 - 8x + 16 + y^2 + 10y + 25 - 16 - 25 - 128 &= 0 \\ (x - 4)^2 + (y + 5)^2 &= 13^2 \end{aligned}$$

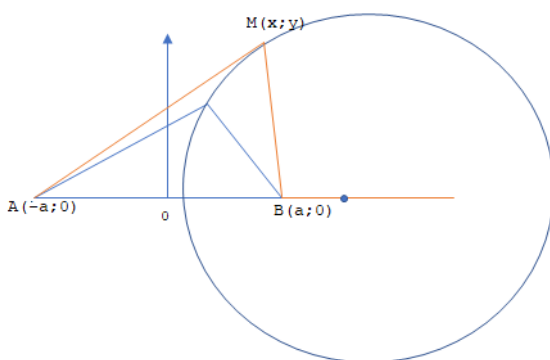
Ответ: $O(4; -5); R = 13$

№4. Геометрическое место точек, расположенных на равных расстояниях от концов отрезка.



Этим геометрическим местом точек является **серединный перпендикуляр**. Доказывается через равенство треугольников.

№5. Геометрическое место точек, расстояние от которых до левого конца в 2 раза больше, чем до правого.



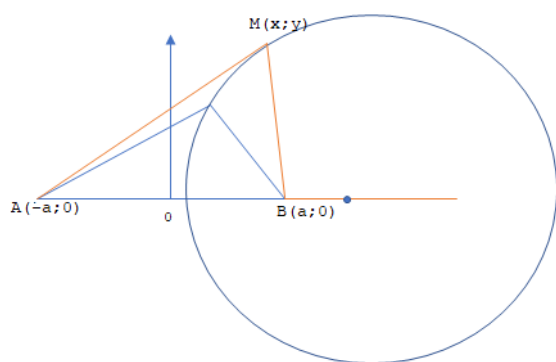
Расположим отрезок так, что середина отрезка совпадает с началом координат и отрезок полностью находится на оси ОХ. Левый конец отрезка $A(-a; 0)$. Правый конец $B(a; 0)$. Пусть $M(x; y)$ точка геометрического места точек, удовлетворяющих условиям задачи.

$$\begin{aligned}\frac{AM}{BM} &= 2 \Rightarrow \frac{AM^2}{BM^2} = 4 \Rightarrow AM^2 = 4 \cdot BM^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x+a)^2 + y^2 = 4(x-a)^2 + 4y^2 \\ x^2 + 2ax + a^2 + y^2 &= 4x^2 - 8ax + 4a^2 + 4y^2 \Rightarrow 3x^2 - 10ax + 3a^2 + 3y^2 = 0 \\ x^2 - \frac{10}{3}ax + a^2 + y^2 &= 0 \Rightarrow \left(x - \frac{5}{3}a\right)^2 + y^2 = \frac{16}{9}a^2\end{aligned}$$

Центр окружности $O\left(\frac{5}{3}a; 0\right)$. Радиус $\frac{4a}{3}$.

Таким образом множеством точек, удовлетворяющих условию задачи, является окружность, центр которой находится на прямой, содержащей концы отрезка на расстоянии $a \cdot \frac{5}{3}$ от середины отрезка и радиусом $a \cdot \frac{4}{3}$, где $2a$ - это длина отрезка.

№6. Геометрическое место точек, расстояние от которых до левого конца в n раз больше, чем до правого.



Расположим отрезок так, что середина отрезка совпадает с началом координат и отрезок полностью находится на оси ОХ. Левый конец отрезка $A(-a; 0)$. Правый конец $B(a; 0)$. Пусть $M(x; y)$ точка геометрического места точек, удовлетворяющих условиям задачи.

$$\begin{aligned}\frac{AM}{BM} &= n \Rightarrow \frac{AM^2}{BM^2} = n^2 \Rightarrow AM^2 = n^2 \cdot BM^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x+a)^2 + y^2 = n^2(x-a)^2 + n^2y^2 \\ x^2 + 2ax + a^2 + y^2 &= n^2x^2 - 2n^2xa + n^2a^2 + n^2y^2 \\ (n^2 - 1)x^2 - 2a(n^2 + 1)x + a^2(n^2 - 1) + y^2(n^2 - 1) &= 0 \\ x^2 - 2a \cdot \frac{n^2 + 1}{n^2 - 1} \cdot x + y^2 + a^2 &= 0 \\ \left(x - a \cdot \frac{n^2 + 1}{n^2 - 1}\right)^2 + y^2 + a^2 - a^2 \cdot \left(\frac{n^2 + 1}{n^2 - 1}\right)^2 &= 0 \\ \left(x - a \cdot \frac{n^2 + 1}{n^2 - 1}\right)^2 + y^2 &= a^2 \cdot \left(\frac{n^4 + 2n^2 + 1 - n^4 + 2n^2 - 1}{(n^2 - 1)^2}\right) \\ \left(x - a \cdot \frac{n^2 + 1}{n^2 - 1}\right)^2 + y^2 &= a^2 \cdot \left(\frac{2n}{n^2 - 1}\right)^2\end{aligned}$$

А это окружность, центр которой находится на прямой, содержащей концы отрезка на расстоянии $a \cdot \frac{n^2+1}{n^2-1}$ от середины отрезка и радиусом $a \cdot \frac{2n}{n^2-1}$, где $2a$ - это длина отрезка.

Решить уравнение:

$$\frac{7(2x - (3x - 1))}{15} - \frac{8(3x - (2x - 1))}{17} = \frac{7}{15}(1 - x)$$

Решение:

$$\frac{7(-x + 1)}{15} - \frac{8(x + 1)}{17} = \frac{7(1 - x)}{15} \Rightarrow \frac{8(x + 1)}{17} = 0 \Rightarrow x = -1$$

Ответ: -1

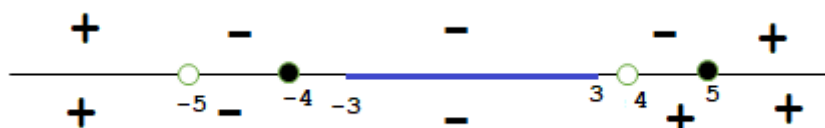
Упростить

$$f(a) = \frac{|a^2 - 25|}{5 + a} - \frac{|a^2 - 16|}{a - 4} \quad \text{при } |a| < 3$$

Найти нули подмодульных выражений.

$$\begin{cases} a^2 - 25 = 0 \\ a^2 - 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -5 \\ a = 5 \\ a = -4 \\ a = 4 \end{cases}$$

Определить знаки подмодульных выражений на заданном множестве аргументов. Знаки первого сверху, второго снизу.



На множестве определения каждое подмодульное выражение отрицательно

$$\begin{cases} |a| < 3 \\ f(a) = \frac{25 - a^2}{5 + a} - \frac{16 - a^2}{a - 4} = 5 - a + a + 4 = 9 \end{cases}$$

Ответ: 9