

Геометрическое место точек.

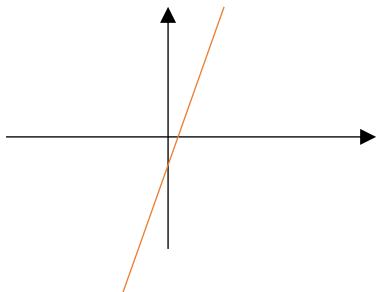
Геометрическое место точек, удовлетворяющих некоторому условию, это множество всех точек, чьи координаты удовлетворяют всем ограничениям, определяющим заданное условие.

Например.

Задача 1.

Пусть условие задается уравнением $y = 3x - 1$

Множество точек, чьи координаты, удовлетворяют этому уравнению- это прямая с угловым коэффициентом 3, проходящая через точку $(0;-1)$.



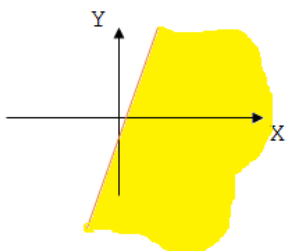
Пусть задано более сложное условие. Задача 2

$$y < 3x - 1$$

В этом случае у геометрического места точек есть фрагмент границы, который задается уравнением $y = 3x - 1$

Граница разбивает плоскость на две полуплоскости, в каждой из которых функция $f(x,y)=y-3x+1$ имеет постоянный знак, который может измениться только при переходе через границу

В точке $(0,0)$ значение функции f положительно, поэтому область, где $f(x,y) > 0$ это область выше красной прямой, значит область, где $f(x,y) < 0 \Rightarrow y > 3x - 1$ это область ниже красной прямой.



Зададим условие, еще более сложное.

Задача 3.

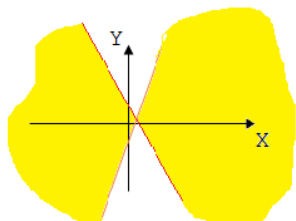
$$y < |3x - 1|$$

Сначала найдем границы. Границы- это те места, где неравенство превращается в равенство.

$$y = |3x - 1| \Rightarrow \begin{cases} y = 3x - 1 \\ y = -3x + 1 \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $f(x,y) = y - |3x - 1|$

В точке $(0;0)$ значение функции f отрицательно, дальше при переходе через границу знак меняется, еще раз при переходе через границу знак еще раз меняется. Поэтому геометрическое место точек для данной задачи выглядит так как на рисунке ниже.



Задача 4. Найти геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют условию

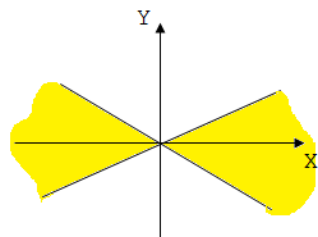
$$|x| > 2|y|$$

Решение:

Найти сначала границы данного множества.

$$|x| = 2|y|$$

Пусть γ -геометрическое место точек, удовлетворяющих заданному уравнению.



$$(x; y) \in \gamma \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x}{2}, \text{ если } x \cdot y \geq 0 \\ y = -\frac{x}{2}, x \cdot y < 0 \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $f(x; y) = |x| - 2|y|$

В точке $(1; 0)$ значение функции положительно, поэтому решением является часть плоскости, окрашенная желтым цветом.

Задание 5.

Найти геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

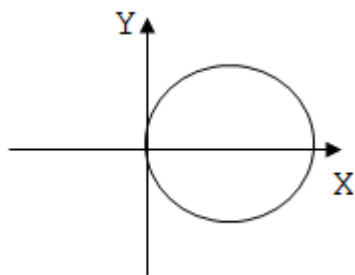
$$x^2 + y^2 = x$$

Решение:

Упростить выражение.

$$x^2 + y^2 = x \Rightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

А это окружность радиуса $\frac{1}{2}$ с центром в точке $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$



Задания для самостоятельной работы.

632. $|x| + |y| = 1$;

634. $||x| - 1| = ||y| - 1|$;

636. $|x + 1| + |y - 1| < 2$;

638. $xy + 1 > 0$;

640. $y = |y - x^2|$;

642. $|(x - 2)(x - 4)| + |y| = 1$;

644. $|y - 1| = |x^2 - |3x - 2||$;

646. $x^2 + y^2 = x^2 y^2 + 1$;

633. $|x - y| + |x + y| = 1$;

635. $|x| < 2|y|$;

637. $\frac{x}{2y} > 1$;

639. $|y| = \frac{1}{||x + 1| - 3|}$;

641. $x^2 + y^2 = x$;

643. $x^2 - |y - x| = 2x$;

645. $|y| = ||x^2 - 4| - 1|$;

647. $\sqrt{x + y} > x$;

$$648. x^2 - 2|x| + y^2 - 2|y| < a;$$

$$650. |y| = |y - \sin x|;$$

$$652. |\sin y| = \sin x;$$

$$654. \sin x = \cos(x + y);$$

$$656. \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 1;$$

$$658. |y| = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}};$$

$$660. x^y > 1;$$

$$662. \log_{x+y}(2x + 3y) > 1;$$

$$664. \min(x, y) = 1;$$

$$666. yx^2 - (y^2 + 1)x + y > 0;$$

$$649. y = |y - \sin x|;$$

$$651. \sin x > \sin y;$$

$$653. \cos |x| + \sin |y| = 0;$$

$$655. \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y;$$

$$657. \operatorname{tg}(\sin x + \sin y) = 0;$$

$$659. \arcsin x = \arccos y;$$

$$661. \log_x y < 0;$$

$$663. |y| = \log_{1/2} ||x + 2| - 1|;$$

$$665. |y| > \max \left(x, x^2, \frac{1}{2} \right);$$

$$667. x^2 - \left(y + \frac{1}{y} \right) x + 1 > 0.$$